Géométrie des courbes

I et J désignent des intervalles non singuliers de $\mathbb{R}$.

I. Arc géométrique

E désigne un espace affine euclidien d'origine O i.e. grosso modo un ensemble de point en bijection avec un espace vectoriel euclidien via $M \mapsto \overrightarrow{OM}$.

1°) Arc paramétré

Déf : On appelle arc paramétré de classe $\mathcal{C}^k$ de E tout couple $\Gamma = (I, M)$ formé d'un intervalle I non singulier et d'une application $M : I \to E$ telle que $t \mapsto \overrightarrow{OM}$ est de classe $\mathcal{C}^k$.
$M(t)$: point courant de paramètre $t \in I$.
$\text{Supp}\,\Gamma = \{M(t) / t \in I\}$: support de Γ.
On dit que Γ est un paramétrage de son support.
On appelle multiplicité d'un point P le nombre $\text{Card}\{t \in I / M(t) = P\}$.

Déf : Si $I = [a,b]$, on dit que l'arc Γ est compact. Les points $A = M(a)$ et $B = M(b)$ sont appelés extrémités initiales et finales de l'arc Γ. Le support de cet arc peut être noté $\overset{\frown}{AB}$.
Si $A = B$, on dit que l'arc est fermé.

Déf : (Vocabulaire cinématique)
Soit $\Gamma = (I, M)$ est un arc de classe $\mathcal{C}^2$.
$M(t)$: position du mobile à l'instant t.
$\text{Supp}\,\Gamma$: trajectoire du mobile.

$\vec{v}(t) = M'(t) = \dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}(t)$: vecteur vitesse du mobile.

$v(t) = \|\vec{v}(t)\|$: vitesse du mobile.

$\vec{a}(t) = M''(t) = \dfrac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t^2}(t)$: vecteur accélération du mobile.

Déf : Un point $M_0 = M(t_0)$ de l'arc $\Gamma = (I, M)$ est dit régulier ssi $\vec{v}(t_0) \neq \vec{o}$. Sinon on dit que ce point est stationnaire. On dit que l'arc Γ est régulier ssi tous ses points le sont.

Déf : Un point $M_0 = M(t_0)$ de l'arc $\Gamma = (I, M)$ est dit birégulier ssi $\vec{v}(t_0)$ et $\vec{a}(t_0)$ ne sont pas colinéaires. On dit que l'arc Γ est birégulier ssi tous ses points le sont.

2°) Changement de paramétrage

Soit $\varphi : I \to J$ un $\mathcal{C}^k$ difféomorphisme.

Déf : Soit $\Gamma = (I, M)$ un arc de classe $\mathcal{C}^k$ et φ un $\mathcal{C}^k$ difféomorphisme de I vers J. L'arc $\Gamma' = (J, M)$ obtenu par le changement de paramétrage $u = \varphi(t)$ est un appelé paramétrage $\mathcal{C}^k$-admissible de l'arc Γ.

Déf : Une notion invariante par changement de paramétrage est qualifiée de géométrique.

Prop : La régularité et la birégularité d'un point sont des notions géométriques.

Déf : Une notion invariante par changement de paramétrage croissant est qualifiée de géométrique orientée.

3°) Tangente

Soit $\Gamma = (I, M)$ un arc de classe $\mathcal{C}^k$ et $t_0 \in I$. On désire étudier l'existence d'une tangente en $M_0 = M(t_0)$.

Déf : Sous réserve d'existence, on appelle tangente à l'arc Γ en M_0 la position limité de la droite $(M_0M(t))$ quand $t \to t_0$.

Théorème :

S'il existe un plus petit entier $p \geq 1$ tel que $\dfrac{\mathrm{d}^p\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t^p}(t_0) \neq \vec{o}$ alors Γ admet une tangente en $M(t_0)$ dirigée par ce vecteur.

Cor : En un point régulier l'arc admet une tangente dirigée par le vecteur vitesse.

4°) Abscisse curviligne

Soit $\Gamma=(I,M)$ un arc de classe $\mathcal{C}^k$.

Déf : Pour $a,b\in I$, on appelle distance curviligne séparant $A=M(a)$ et $B=M(b)$ le réel :

$$d_\Gamma(A,B)=\int_a^b\left\|\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}\right\|.$$

Déf : Soit $t_0\in I$ et $M_0=M(t_0)$. On appelle abscisse curviligne d'origine M_0 le long de l'arc $\Gamma=(I,M)$ l'application $s:I\to\mathbb{R}$ définie par $s(t)=d_\Gamma(M_0,M(t))=\displaystyle\int_{t_0}^t\left\|\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}\right\|$.

Prop : s est une application de classe $\mathcal{C}^1$ et $\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=\left\|\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}\right\|$.

5°) Paramétrage normal d'un arc régulier

Soit $\Gamma=(I,M)$ un arc $\mathcal{C}^k$ (avec $k\geq 1$) régulier et s une abscisse curviligne le long de Γ.

s réalise un $\mathcal{C}^k$-difféomorphisme strictement croissant de I vers un intervalle $J=s(I)$.

Réalisons le changement de paramétrage défini par la relation $s=s(t)$.

Déf : L'arc $\Gamma'=(J,M)$ ainsi obtenu est dit paramétrage normal de l'arc Γ.

Prop : Un paramétrage normal est réalisé à vitesse constante égale à 1.

II. Courbes du plan

Désormais, $\mathcal{P}$ désigne un plan géométrique muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1°) Modes de définition

a) paramétrage cartésien

Déf : Soit $t\mapsto x(t)$ et $t\mapsto y(t)$ deux fonctions réelles définies sur I. On appelle arc cartésien défini par le système $\begin{cases}x=x(t)\\y=y(t)\end{cases}$, l'arc $\Gamma=(I,M)$ avec $M(t)$ le point de coordonnées cartésiennes $x(t),y(t)$.

Prop : Si x et y sont de classe $\mathcal{C}^2$ alors Γ l'est aussi et $\overrightarrow{OM}=x\vec{i}+y\vec{j}$, $\vec{v}(t)=x'\vec{i}+y'\vec{j}$, $\vec{a}=x''\vec{i}+y''\vec{j}$.

b) paramétrage polaire

On pose $\vec{u}_\theta=\cos\theta\vec{i}+\sin\theta\vec{j}$ et $\vec{v}_\theta=-\sin\theta\vec{i}+\cos\theta\vec{j}$.

Déf : Soit $t\mapsto r(t)$ et $t\mapsto\theta(t)$ deux fonctions réelles définies sur I. On appelle arc polaire défini par le système $\begin{cases}r=r(t)\\\theta=\theta(t)\end{cases}$, l'arc $\Gamma=(I,M)$ avec $M(t)$ le point de coordonnées polaires $(r(t),\theta(t))$.

Prop : Si r et σ sont de classe $\mathcal{C}^2$ alors Γ l'est aussi et
$\overrightarrow{OM}=r\vec{u}_\theta$, $\vec{v}=r'\vec{u}_\theta+r\theta'\vec{v}_\theta$ et $\vec{a}=(r''-r\theta'^2)\vec{u}_\theta+(2r'\theta'+r\theta'')\vec{v}_\theta$.

c) passage d'un mode à l'autre

Si Γ est défini en coordonnées polaires par $\begin{cases}r=r(t)\\\theta=\theta(t)\end{cases}$

alors Γ est défini en coordonnées cartésiennes par $\begin{cases}x=r(t)\cos\theta(t)\\y=r(t)\sin\theta(t)\end{cases}$.

Inversement, si Γ est défini en coordonnées cartésiennes par $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ et si $O \notin \text{Supp}\,\Gamma$ alors Γ peut être défini en polaires par $\begin{cases} r = \sqrt{x^2(t)+y^2(t)} \\ \theta = \theta(t) \end{cases}$ où θ est défini par relèvement de sorte que $\begin{cases} \cos\theta(t) = x(t)\Big/\sqrt{x^2(t)+y^2(t)} \\ \sin\theta(t) = y(t)\Big/\sqrt{x^2(t)+y^2(t)} \end{cases}$ soit encore $\mathrm{e}^{i\theta(t)} = \dfrac{x(t)+iy(t)}{|x(t)+iy(t)|}$.

2°) Etude locale

On désire préciser l'allure d'un arc $\Gamma = (I, M)$ au voisinage de l'un de ses points $M_0 = M(t_0)$.

Supposons qu'il existe un plus petit entier $p \geq 1$ tel que $\vec{u} = \dfrac{\mathrm{d}^p \overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t^p}(t_0) \neq \vec{o}$: la tangente en M_0 existe et est dirigée par $\vec{u}$.

Supposons, de plus, qu'il existe, un plus petit entier $q \geq p+1$ tel que $\vec{v} = \dfrac{\mathrm{d}^q \overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t^q}(t_0)$ ne soit pas colinéaire à $\vec{u}$.

Par définition des entiers p et q on a :

$\forall 1 \leq k < p, \dfrac{\mathrm{d}^k \overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t^k}(t_0) = \vec{o}$ et $\forall p < k < q$, $\dfrac{\mathrm{d}^k \overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t^k}(t_0) = \lambda_k \vec{u}$

Par Taylor-Young, quand $h \to 0$: $\overrightarrow{M_0M(t_0+h)} = \dfrac{h^p}{p!}\dfrac{\mathrm{d}^p \overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t^p}(t_0) + \cdots + \dfrac{h^q}{q!}\dfrac{\mathrm{d}^q \overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t^q}(t_0) + \overrightarrow{o(h^q)}$ permet d'écrire :

$\overrightarrow{M_0M(t_0+h)} = \left(h^p/p! + o(h^p)\right)\vec{u} + \left(h^q/q! + o(h^q)\right)\vec{v}$.

On peut alors conclure aux allures classiques.

3°) Etude asymptotique

Soit $\Gamma = (I, M)$ un arc paramétré et a une extrémité ouverte de l'intervalle I éventuellement infinie. On désire étudier le comportement du point $M(t)$ en a.

Déf : S'il existe un point L tel que $\overrightarrow{OM(t)} \to \overrightarrow{OL}$ quand $t \to a$ alors on dit que L est un point limite de Γ en a.

Déf : Si $OM(t) \xrightarrow[t \to a]{} +\infty$, on dit que Γ présente une branche infinie en a.

Déf : Supposons que Γ ait une branche infinie en a. Si la droite $(OM(t))$ admet une position limite quand $t \to a$ alors cette droite limite D est appelée direction asymptotique de l'arc Γ en a.

Déf : Si $(\overrightarrow{OM}(t) \,|\, \vec{v}) \xrightarrow[t \to a]{} \pm\infty$ alors on dit que Γ présente une branche parabolique de direction D.

Si $(\overrightarrow{OM}(t) \,|\, \vec{v}) \xrightarrow[t \to a]{} b$ alors la droite $\Delta = D + b\vec{v}$ est dite asymptote à Γ en a.

4°) Courbure et rayon de courbure

a) détermination angulaire

Soit $\Gamma = (I, M)$ un arc de classe $\mathcal{C}^k$ régulier et s une abscisse curviligne le long de Γ.

$\vec{T} = \dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}s}$ dirige la tangente en tout point M. On pose $\vec{N} = \text{Rot}_{\pi/2}(\vec{T})$.

Déf : Le repère orthonormé direct $(M, \vec{T}, \vec{N})$ est appelé repère de Frénêt au point M.

L'application $t \mapsto \vec{T}(t)$ est de classe $\mathcal{C}^{k-1}$ et prend pour valeurs des vecteurs unitaires donc par relèvement, il existe $\alpha \in \mathcal{C}^{k-1}(I, \mathbb{R})$ tel que $\vec{T}(t) \begin{vmatrix} \cos\alpha(t) \\ \sin\alpha(t) \end{vmatrix}$ i.e. $\alpha(t) = (\vec{i}, \vec{T}(t)) \quad [2\pi]$.

Déf : α : détermination angulaire le long de l'arc Γ.

Prop : $\vec{T}\begin{vmatrix}\cos\alpha\\ \sin\alpha\end{vmatrix}$ et $\vec{N}\begin{vmatrix}-\sin\alpha\\ \cos\alpha\end{vmatrix}$.

b) courbure

Déf : $\gamma = \dfrac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}s}$: courbure le long de l'arc Γ.

Prop : $\dfrac{\mathrm{d}\vec{T}}{\mathrm{d}s} = \gamma\vec{N}$ et $\dfrac{\mathrm{d}\vec{N}}{\mathrm{d}s} = -\gamma\vec{T}$.

$\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}s} = \vec{T}$ et $\dfrac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}s^2} = \gamma\vec{N}$ donc $\gamma = \mathrm{Det}\left(\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}s}, \dfrac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}s^2}\right)$.

M est birégulier ssi $\gamma \neq 0$.

Déf : Si M est birégulier alors

$R = 1/\gamma$: rayon de courbure en M.

$\Omega = M + R\vec{N}$: centre de courbure en M.

$\mathcal{C}(\Omega, |R|)$: cercle osculateur en M.

c) formules de Frénêt

$\vec{v} = \dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}s} = v\vec{T}$ avec $v = \dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$ et $\vec{a} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\vec{T} + \gamma v^2\vec{N}$.

Théorème :

$\gamma = \dfrac{\mathrm{Det}(\vec{v}, \vec{a})}{v^3}$.

III. Arc cartésiens

Soit $t \mapsto x(t)$ et $t \to y(t)$ des fonctions réelles définies sur I classe $\mathcal{C}^k$ (avec $k \geq 2$).

Soit $\Gamma = (I, M)$ l'arc paramétré défini par $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$.

1°) Réduction du domaine d'étude

Cas $I = \mathbb{R}$ et $\begin{cases} x(t+T) = x(t) \\ y(t+T) = y(t) \end{cases}$ avec $T > 0$:

$M(t+T) = M(t)$ et on peut réduire l'étude à un intervalle d'amplitude T.

Cas I symétrique par rapport à t_0 et $\begin{cases} x(2t_0 - t) = \pm x(t) \\ y(2t_0 - t) = \pm y(t) \end{cases}$

$M(t_0 + h)$ et $M(t_0 - h)$ se déduisent l'un de l'autre par symétrie, on peut réduire l'étude à $I \cap [t_0, +\infty[$ ou $I \cap]-\infty, t_0]$.

2°) Etude locale

$M(t)$ régulier ssi $(x'(t), y'(t)) \neq (0,0)$.

La tangente a alors pour pente $m(t) = \dfrac{y'(t)}{x'(t)} \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$.

M birégulier ssi $x''y' - x'y'' \neq 0$.

On a un point ordinaire et le signe de $x'y'' - x''y'$ donne l'orientation de la courbe : figure.

Si $x'y'' - x''y'$ s'annule en changeant de signe il y a un point d'inflexion.

Sinon, en un point $M(t_0)$ non birégulier, on réalise les DL de x et y en t_0 :

$x(t) = a_0 + a_1(t-t_0) + \cdots + a_n(t-t_0)^n + o((t-t_0)^n)$,

$y(t) = b_0 + b_1(t-t_0) + \cdots + b_n(t-t_0)^n + o((t-t_0)^n)$

L'entier p est le plus petit ≥ 1 tel que $\begin{pmatrix} a_p \\ b_p \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et on peut prendre $\vec{u}\begin{vmatrix} a_p \\ b_p \end{vmatrix}$.

L'entier q est le plus petit $\geq p+1$ tel que $\begin{pmatrix} a_q \\ b_q \end{pmatrix}$ non colinéaire à $\begin{pmatrix} a_p \\ b_p \end{pmatrix}$ et on peut prendre $\vec{v}\begin{vmatrix} a_q \\ b_q \end{vmatrix}$.

On peut alors donner l'allure de la courbe..

3°) Branche infinie

Soit a une extrémité ouverte (éventuellement infinie) de I.

Si $x(t) \xrightarrow[t\to a]{} x_0$ et $y(t) \xrightarrow[t\to a]{} y_0$, $L\begin{vmatrix} x_0 \\ y_0 \end{vmatrix}$ est point limite en a.

En étudiant $\lim\limits_{t\to a} \dfrac{y(t)-y_0}{x(t)-x_0}$ on peut caractériser une tangente en L.

Si $x(t) \xrightarrow[t\to a]{} \pm\infty$ ou $y(t) \xrightarrow[t\to a]{} \pm\infty$, Γ présente une branche infinie en a.

Si $\dfrac{y(t)}{x(t)} \xrightarrow[t\to a]{} \alpha \in \mathbb{R}$ alors la droite $D : y = \alpha x$ est direction asymptotique à Γ en a et :

$y(t) - \alpha x(t) \xrightarrow[t\to a]{} \pm\infty \Rightarrow$ branche parabolique de direction D.

$y(t) - \alpha x(t) \xrightarrow[t\to a]{} \beta \in \mathbb{R} \Rightarrow \Delta : y = \alpha x + \beta$ est asymptote à Γ.

Si $\dfrac{y(t)}{x(t)} \xrightarrow[t\to a]{} \pm\infty$ alors la droite $D : x = 0$ est direction asymptotique à Γ en a et

Si $x(t) \xrightarrow[t\to a]{} \pm\infty \Rightarrow$ branche parabolique verticale.

Si $x(t) \xrightarrow[t\to a]{} x_0 \Rightarrow \Delta : x = x_0$ asymptote.

4°) Etude métrique

Abscisse curviligne : $\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \sqrt{x'^2 + y'^2}$.

Détermination angulaire : $\vec{T} = \dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}s}\begin{vmatrix} \mathrm{d}x/\mathrm{d}s \\ \mathrm{d}y/\mathrm{d}s \end{vmatrix}$, $\vec{T}\begin{vmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{vmatrix}$ donc $\begin{cases} \cos\alpha = \mathrm{d}x/\mathrm{d}s \\ \sin\alpha = \mathrm{d}y/\mathrm{d}s \end{cases}$.

Courbure : $\gamma = \dfrac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}s} = \dfrac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t}\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}$. Aussi $\gamma = \dfrac{\mathrm{Det}(\vec{v},\vec{a})}{v^3} = \dfrac{x'y'' - x''y'}{(x^2+y^2)^{3/2}}$.

IV. Arc polaire

On se limite ici aux arcs polaires de la forme $\begin{cases} r = r(t) \\ \theta = t \end{cases}$, on parle d'arc défini par l'équation polaire $r = r(\theta)$.

Soit $r : I \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^k$ et $\Gamma = (I, M)$ l'arc défini ci-dessus de point courant $M(\theta)$ donné par $\overrightarrow{OM}(\theta) = r(\theta)\vec{u}_\theta$.

1°) Réduction du domaine d'étude

Cas $I = \mathbb{R}$ et $r(\theta + T) = r(\theta)$.

$M(\theta + T) = \mathrm{Rot}_{O,T}(M(\theta))$, on limite l'étude à un intervalle d'amplitude T et on complète la courbe obtenue par les $\mathrm{Rot}_{O,kT}$ ($k \in \mathbb{Z}$).

Cas I symétrique par rapport à θ_0 et $r(2\theta_0 - \theta) = r(\theta)$ (resp. $r(2\theta_0 - \theta) = -r(\theta)$)

$M(\theta_0 - h) = s_{\theta=\theta_0}(M(\theta_0 + h))$ (resp. $M(\theta_0 - h) = s_{\theta=\theta_0+\pi/2}(M(\theta_0 + h))$)

On limite l'étude à $I \cap [\theta_0, +\infty[$ ou $I \cap]-\infty, \theta_0]$.

En particulier : r paire $\Rightarrow$ symétrie d'axe (Ox) et r impaire $\Rightarrow$ symétrie d'axe (Oy).

2°) Etude locale

a) étude en O

$r(\theta_0)=0$ avec $\theta_0 \in I$. $M(\theta_0)=O$. Cas usuels :

Cas 1 :

θ		θ_0	
$\rho(\theta)$	$+$	0	$-$

Cas 2 :

θ		θ_0	
$\rho(\theta)$	$-$	0	$+$

Cas 3 :

θ		θ_0	
$\rho(\theta)$	$+$	0	$+$

Cas 4 :

θ		θ_0	
$\rho(\theta)$	$-$	0	$-$

La droite $(OM(\theta))$ est dirigée par $\vec{u}_\theta$ et $\vec{u}_\theta \xrightarrow[\theta\to\theta_0]{} \vec{u}_{\theta_0}$ donc l'arc admet une tangente T en $M(\theta_0)=O$ qui est la droite d'équation polaire $\theta=\theta_0$.

b) étude en dehors de O

$r(\theta)\neq 0 \quad M(\theta)\neq O$.

$\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}\theta}=r'\vec{u}_\theta+r\vec{v}_\theta\neq\vec{o}$ donc $M(\theta)$ est régulier.

La tangente en M est dirigée par $\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}\theta}$. Pour repérer cette tangente, on introduit $V(\theta)=(\vec{u}_\theta,\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}\theta}(\theta)) \quad [2\pi]$.

figure.

Si $r'(\theta)=0$ alors $V(\theta)=\pi/2 \quad [\pi]$: tangente orthoradiale.

Si $r'(\theta)\neq 0$ alors $\tan V(\theta)=\dfrac{r(\theta)}{r'(\theta)}$ ce qui suffit pour positionner T .

Plus précisément V est déterminé par $\begin{cases}\cos V=\dfrac{r'}{\sqrt{r^2+r'^2}}\\ \sin V=\dfrac{r}{\sqrt{r^2+r'^2}}\end{cases}$

$\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}\theta}=r'\vec{u}_\theta+r\vec{v}_\theta$, $\dfrac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}\theta^2}=(r''-r)\vec{u}_\theta+2r'\vec{v}_\theta$.

$\mathrm{Det}\left(\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}\theta},\dfrac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}\theta^2}\right)=r^2+2r'^2-rr''$.

$r^2+2r'^2-rr''\neq 0 \Leftrightarrow M$ est birégulier

Si $r^2+2r'^2-rr''>0$: concavité est tournée vers O .

Si $r^2+2r'^2-rr''<0$: concavité est tournée vers l'extérieur.

Si $r^2+2r'^2-rr''$ s'annule en changeant de signe : point d'inflexion.

3°) Branche infinie

Soit θ_0 une extrémité ouverte de I .

Cas $\theta_0=+\infty$:

$\lim\limits_{\theta\to+\infty}\rho(\theta)=0^+/0^- \Rightarrow$ enroulement autour de O .

$\lim\limits_{\theta\to+\infty}\rho(\theta)=R\neq 0$, $\Rightarrow$ cercle de centre O et de rayon $|R|$ asymptote.

$\lim\limits_{\theta\to+\infty}\rho(\theta)=+\infty/-\infty \Rightarrow$ branche spirale.

Cas $\theta_0=-\infty$: idem .

Cas $\theta_0\in\mathbb{R}$

$\rho(\theta)\xrightarrow[\theta\to\theta_0]{}\rho_0 \Rightarrow$ point limite de coordonnées polaires (ρ_0,θ_0) .

$\rho(\theta)\xrightarrow[\theta\to\theta_0]{}\pm\infty \Rightarrow$ branche infinie.

$(OM(\theta))$ dirigée par $\vec{u}_\theta \xrightarrow[\theta\to\theta_0]{} \vec{u}_{\theta_0}$. Direction asymptotique $D:\theta=\theta_0$.

$(\vec{v}_{\theta_0} \mid \overrightarrow{OM}(\theta)) = r(\theta)\sin(\theta-\theta_0)$

Si $r(\theta)\sin(\theta-\theta_0) \xrightarrow[\theta\to\theta_0]{} \pm\infty$: branche parabolique de direction $D:\theta=\theta_0$.

Si $r(\theta)\sin(\theta-\theta_0) \xrightarrow[\theta\to\theta_0]{} b$: asymptote $\Delta = D + b\vec{v}_{\theta_0}$

4°) Etude métrique

$\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\theta} = \sqrt{r^2+r'^2}$.

$\alpha = \theta + V$ avec $V = (\vec{u}_\theta, \dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}\theta})$ déterminé par $\begin{cases} \cos V = \dfrac{r'}{\sqrt{r^2+r'^2}} \\ \sin V = \dfrac{r}{\sqrt{r^2+r'^2}} \end{cases}$.

Courbure : $\gamma = \dfrac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}s} = \dfrac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}\theta}\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s}$. $\gamma = \dfrac{r^2+2r'^2-rr''}{(r^2+r'^2)^{3/2}}$.

V. Courbe définie par une équation cartésienne

U désigne un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

1°) Courbes définies par une équation cartésienne

Déf : Soit $f:U\to\mathbb{R}$. On appelle courbe Γ définie (implicitement) par l'équation cartésienne $f(x,y)=0$ l'ensemble des points M de coordonnées $(x,y)\in U$ tels que $f(x,y)=0$. On note alors $\Gamma : f(x,y)=0$.

Pour étudier une telle courbe :
(1) on résout l'équation $f(x,y)=0$ de sorte d'exprimer y en fonction de x (ou l'inverse). On peut alors visualiser Γ à l'aide de graphes de fonctions qui à x associe y (ou inversement) (exemple du cercle)
(2) on cherche un paramétrage cartésien (ex. de l'ellipse, de l'hyperbole).
(3) on cherche un paramétrage polaire.

2°) Théorème des fonctions implicites

Soit $f:U\to\mathbb{R}^2$ de classe $\mathcal{C}^k$ (avec $k\geq 1$) et $(x_0,y_0)\in U$ tel que $f(x_0,y_0)=0$.

Théorème des fonctions implicites : (admis)

Si $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\neq 0$ alors il existe deux intervalles ouverts I et J centrés respectivement en x_0 et y_0 tels que $I\times J\subset U$ et tels qu'il existe une fonction $\varphi : \begin{cases} I\to J \\ x\mapsto y=\varphi(x) \end{cases}$ de classe $\mathcal{C}^k$ telle que $\forall (x,y)\in I\times J, f(x,y)=0 \Leftrightarrow y=\varphi(x)$.

Théorème :

Si $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\neq 0$ alors il existe deux intervalles ouverts I et J centrés respectivement en x_0 et y_0 tels que $I\times J\subset U$ et tels qu'il existe une fonction $\psi : \begin{cases} J\to I \\ y\mapsto x=\psi(y) \end{cases}$ de classe $\mathcal{C}^k$ telle que $\forall (x,y)\in I\times J, f(x,y)=0 \Leftrightarrow x=\psi(y)$.

Ainsi, Au voisinage de (x_0,y_0), Γ est le graphe d'une fonction $y\mapsto x$ de classe $\mathcal{C}^k$.

Déf : Les applications $x\mapsto\varphi(x)$ et $y\mapsto\psi(y)$ définies dans les théorèmes ci-dessus sont appelées fonctions implicites définies au voisinage de (x_0,y_0) par la relation $f(x,y)=0$.

Problème :
Que sait-on sur φ et ψ ?

$\varphi : I \to J$ est de classe $\mathcal{C}^k$, $\varphi(x_0) = y_0$ et $\varphi'(x_0) = -\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \Big/ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$.

$\psi : J \to I$ est de classe $\mathcal{C}^k$, $\psi(y_0) = x_0$ et $\psi'(y_0) = -\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \Big/ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$.

3°) Tangente à une courbe définie par une équation cartésienne

Soit $f : U \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ et $\Gamma : f(x, y) = 0$.

Déf : Un point $M_0(x_0, y_0) \in \Gamma$ est dit régulier ssi $\overrightarrow{\text{grad}} f(x_0, y_0) \neq \vec{o}$.

Théorème :

Si $M_0(x_0, y_0)$ est un point régulier de $\Gamma : f(x, y) = 0$ alors Γ admet une tangente en M_0 dont $\overrightarrow{\text{grad}} f(x_0, y_0)$ est vecteur normal. Cette droite a pour équation :

$\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0).(x - x_0) + \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0).(y - y_0) = 0$.

4°) Coniques

$\mathcal{R} = (O; \vec{i}, \vec{j})$ repère orthonormé.

Déf : On appelle conique du plan toute courbe Γ définie par une équation de la forme $ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + k = 0$ avec $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$.

Théorème :

Si $M(x_0, y_0)$ est un point régulier de la conique $\Gamma : ax^2 + by^2 + 2cxy + 2dx + 2ey + k = 0$ alors la tangente en ce point a pour équation : $axx_0 + byy_0 + c(x_0 y + x y_0) + d(x + x_0) + e(y + y_0) + k = 0$.

5°) Obtention de l'équation réduite d'une conique

$\mathcal{R} = (O; \vec{i}, \vec{j})$ repère orthonormé. $\Gamma : ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + k = 0$ avec $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$.

a) dérectangularisation

$M \begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix}$ dans $\mathcal{R}$. $f(M) = ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + k$. $M \in \Gamma \Leftrightarrow f(M) = 0$.

$f(M) = q(\overrightarrow{OM}) + 2\ell(\overrightarrow{OM}) + k$ avec $q(\overrightarrow{OM}) = ax^2 + 2bxy + cy^2$, $\ell(\overrightarrow{OM}) = dx + ey$.

$\text{Mat}_{(\vec{i}, \vec{j})}(q) = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$, $\text{Mat}_{(\vec{i}, \vec{j})}(\ell) = \begin{pmatrix} d & e \end{pmatrix}$.

Il existe une base orthonormée $(\vec{u}, \vec{v})$ telle que

$\text{Mat}_{(\vec{u}, \vec{v})}(q) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$, $\text{Mat}_{(\vec{u}, \vec{v})}(\ell) = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \end{pmatrix}$.

$M \begin{vmatrix} x' \\ y' \end{vmatrix}$ dans $\mathcal{R}' = (O; \vec{u}, \vec{v})$.

$\overrightarrow{OM} \begin{vmatrix} x' \\ y' \end{vmatrix}$, $q(\overrightarrow{OM}) = \lambda x'^2 + \mu y'^2$, $\ell(\overrightarrow{OM}) = \alpha x' + \beta y'$. $f(M) = \lambda x'^2 + \mu y'^2 + 2\alpha x + 2\beta y + k$.

Ainsi dans $\mathcal{R}'$, $\Gamma : \lambda x^2 + \mu y^2 + 2\alpha x + 2\beta y + k = 0$.

b) q non dégénérée

Ici $ac - b^2 \neq 0$, $\lambda, \mu \neq 0$.

$\Gamma : \lambda\left(x + \dfrac{\alpha}{2\lambda}\right)^2 + \mu\left(y + \dfrac{\beta}{2\mu}\right) + \ell = 0$.

Soit $\Omega \begin{vmatrix} -2\alpha/\lambda \\ -2\beta/\mu \end{vmatrix}$. Dans $\mathcal{R}'' = (\Omega, \vec{u}, \vec{v})$, $\Gamma : \lambda x^2 + \mu y^2 + \ell = 0$

Ω est centre de symétrie de Γ.

$(\Omega;\vec{u})$ et $(\Omega;\vec{v})$ sont axes de symétrie.

Déf : Le point Ω est appelé centre de la conique.

Prop : Le gradient de f est nul en Ω.

Dans $\mathcal{R}''=(\Omega,\vec{u},\vec{v})$, $\Gamma:\lambda x^2+\mu y^2+\ell=0$.

Quitte à passer à l'opposé, on peut supposer $\lambda>0$.

Cas $\mu>0$ (i.e. $ac-b^2>0$)

Si $\ell>0$: ellipse ou cercle.

Si $\lambda=\mu$: cercle.

Si $\lambda<\mu$: ellipse d'axe focal $(\Omega;\vec{u})$.

Si $\lambda>\mu$: ellipse d'axe focal $(\Omega;\vec{v})$.

Si $\ell=0$: $\Gamma=\{\Omega\}$.

Si $\ell<0$: $\Gamma=\varnothing$.

Cas $\mu<0$ (i.e. $ac-b^2<0$)

Si $\ell>0$: hyperbole d'axe focal $(O;\vec{u})$.

Si $\ell=0$: réunion de deux droites.

Si $\ell<0$: hyperbole d'axe focal $(O;\vec{v})$.

c) q dégénérée

Ici $ac-b^2=0$, $\lambda=0$ ou $\mu=0$ mais pas les deux.

Quitte à échanger, on peut supposer $\lambda=0$ et $\mu\neq0$.

Dans $\mathcal{R}'=(O;\vec{u},\vec{v})$, $\Gamma:\mu y^2+2\alpha x+2\beta y+k=0$.

Cas $\alpha=0$: $\Gamma:\mu y^2+2\beta y+k=0$.

Selon le signe de $\Delta=4\beta^2-4\mu k$, Γ est vide, une droite, ou la réunion de deux droites parallèles.

Cas $\alpha\neq0$: $\Gamma:\mu\left(y-\dfrac{\beta}{\mu}\right)^2+2\alpha\left(x+\dfrac{k\mu-\beta^2}{\alpha\mu}\right)=0$. Soit $S\left|\begin{matrix}(\beta^2-k\mu)/\alpha\mu\\ \beta/\mu\end{matrix}\right.$.

Dans $\mathcal{R}''=(S,\vec{u},\vec{v})$, $\Gamma:\mu y^2+2\alpha x=0$ soit $\Gamma:y^2=2px$ avec $p=-\alpha/\mu$.